أجوبة امتحان الدورة العادية 2007

التمرين الأول :

1

لدينا $(\mathcal{S})$ مُعرفة بـ : $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$

يعني : $(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2-6z)=-8$

يعني : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2$

إذن : $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1;2;3)$ و شعاعها $r=\sqrt{6}$.

2

لدينا : $\Omega(1,2,3)$ و $(\mathcal{P}) : x-y+2z+1=0$

إذن : $d(\Omega,(\mathcal{P}))=\dfrac{|1-2+2\times 3+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=r$

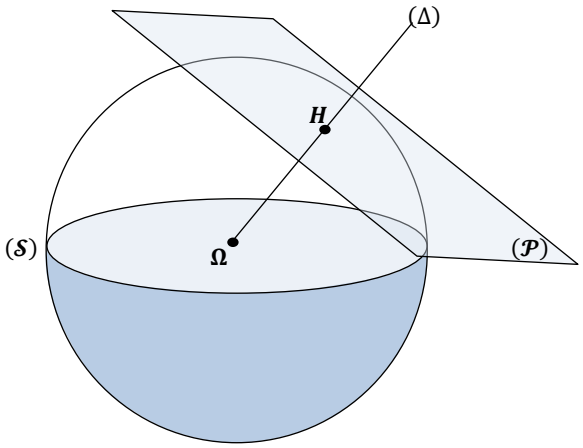
بما أن : $d(\Omega,(\mathcal{P}))=r$

فإن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة $H(\alpha,\beta,\gamma)$.

3 أ

لدينا : $(\mathcal{P}) : x-y+2z+1=0$

إذن : $\vec{n}(1,-1,2)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$.



لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

إذن : $\overrightarrow{\Omega M}(x-1\,;y-2\,;z-3)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

و بما أن (Δ) عمودي على المستوى $(\mathcal{P})$.

فإن المتجهتان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهتان مستقيميتان .

إذن يوجد عدد حقيقي t يحيث : $\overrightarrow{\Omega M}=t\,\vec{n}$.

يعني : $\begin{cases} x-1=t \\ y-2=-t \\ z-3=2t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$

يعني : $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2-t \\ z=2t+3 \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$

و هذه النظمة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) باستعمال البارامتر الحقيقي t .

3 ب

ننطلق من كون $H(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى $(\mathcal{P})$.

إذن : $H\in(\Delta)$ و $H\in(\mathcal{P})$.

يعني : $\begin{cases} \alpha=1+t \\ \beta=2-t \\ \gamma=2t+3 \\ \alpha-\beta+2\gamma+1=0 \end{cases}$; $(\exists!\, t\in\mathbb{R})$

يعني : $(1+t)-(2-t)+2(3+2t)+1=0$

يعني : $6t+6=0$ يعني : $t=-1$

و بالتالي : $H(0,3,1)$ هي نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى $(\mathcal{P})$.

التمرين الثاني :

1 أ

$$(3-2i)^2=3^2-2(3)(2i)+(2i)^2$$
$$=9-12i-4=5-12i$$

ملاحظة : معظم الأسئلة التي تُطرحُ بهذا الشكل البسيط لا يكون الهدف منها الحساب فقط بل يكون الغرض منها التوظيف في الأسئلة الموالية .

1 ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2(4+i)z+10+20i=0$.

لدينا :
$$\Delta=\left(-2(4+i)\right)^2-4(10+20i)$$
$$=(60+32i)-(40+80i)=20-48i$$
$$=4(5-12i)=\left(2(3-2i)\right)^2$$

إذن المعادلة تقبل حلين z_1 و z_2 كما يلي :

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{2(4+i)-2(3-2i)}{2}=1+3i \\ z_2=\dfrac{2(4+i)+2(3-2i)}{2}=7-i \end{cases}$$

2 أ

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{(5+9i)-(1+3i)}{(7-i)-(1+3i)}=\frac{4+6i}{6-4i}=\frac{i(6-4i)}{(6-4i)}=i$$

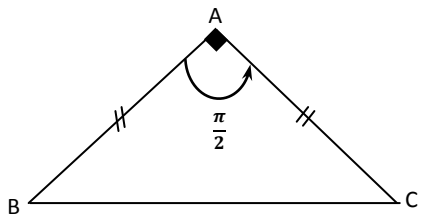
2 ب

ننطلق من النتيجة : $\dfrac{c-a}{b-a}=i=e^{\frac{i\pi}{2}}$

إذن : $\begin{cases} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=1 \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} |c-a|=|b-a| \\ \arg\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} AC=AB \\ B\hat{A}C=90^\circ \end{cases}$

و بالتالي : المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في نفس النقطة A .



www.baclive.blogspot.com

التمرين الثالث :

1

ليكن x عددا حقيقيا مخالفا للعدد -1

$$(x-1)+\frac{1}{(x+1)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)}$$
$$=\frac{x^2-1}{(x+1)}+\frac{1}{(x+1)}=\frac{x^2}{(x+1)}$$

2

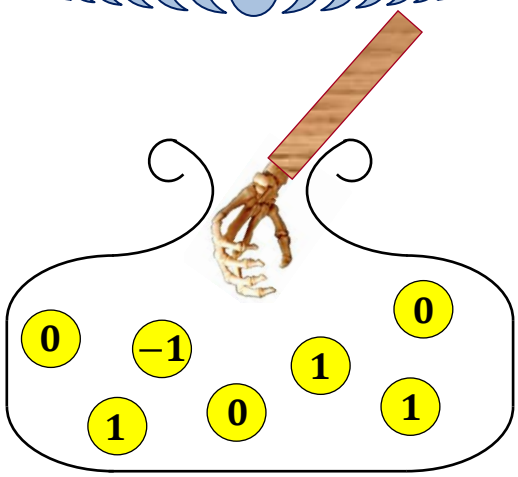
$$\int_0^2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)dx=\int_0^2\left((x-1)+\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)dx$$
$$=\int_0^2(x-1)dx+\int_0^2\left(\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2+[\ln(x+1)]_0^2$$
$$=(0)+(\ln 3-\ln 1)=\ln 3$$

3

$$\int_0^2 \underbrace{x}_{u'}\ \underbrace{\ln(x+1)}_{v}\,dx=[uv]-\int uv'$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^2-\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=2\ln 3-\frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)dx$$
$$=2\ln 3-\frac{1}{2}(\ln 3)=\frac{3}{2}\ln 3$$

التمرين الرابع :

1



عندما نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاث بيدقات من كيس يضم 7 بيدقات فإن التجربة العشوائية تَحتمِلُ C_7^3 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega)=C_7^3=35$. بحيث Ω هو كون الإمكانيات .

نعتبر الحدث A المعرف بما يلي :

$A=\{$ لا توجد أية بيدقة تحمل 0 من بين البيدقات الثلاث المسحوبة $\}$

إذن : $A=\left\{\begin{array}{c}\text{بيدقتان تحملان}\\ \text{العدد 1 و الأخرى}\\ \text{تحمل } -1\end{array}\right\}$ أو $\left\{\begin{array}{c}\text{البيدقتان الثلاث}\\ \text{تحمل العدد 1}\end{array}\right\}$

و منه : $p(A)=p\left(\begin{array}{c}\text{بيدقتان تحملان}\\ \text{العدد 1 و الأخرى}\\ \text{تحمل } -1\end{array}\right)+p\left(\begin{array}{c}\text{البيدقتان الثلاث}\\ \text{تحمل العدد 1}\end{array}\right)$

$$=\frac{C_3^3}{35}+\frac{C_3^2\times C_1^1}{35}=\frac{1}{35}+\frac{3}{35}=\frac{4}{35}$$

نعتبر الحدث الثاني B المعرف بما يلي :

$B=\{$ سحب ثلاث بيدقات تحمل أعدادا مختلفة مثنى مثنى $\}$

$=\left\{\begin{array}{c}\text{كرة تحمل}\\ \text{العدد } -1\end{array}\right\}$ و $\begin{array}{c}\text{كرة}\\ \text{تحمل}\\ \text{العدد 1}\end{array}$ و $\begin{array}{c}\text{كرة}\\ \text{تحمل}\\ \text{العدد 0}\end{array}$

إذن : $p(B)=\dfrac{C_3^1\times C_3^1\times C_1^1}{35}=\dfrac{9}{35}$

نعتبر الحدث الأخير C المعرف بما يلي :

$C=\{$ مجموع الأعداد المسجلة على البيدقات المسحوبة يساوي 0 $\}$

نلاحظ أن هناك حالتين يتحقق فيهما الحدث C و هما :

الحالة الأولى : 0 0 0

الحالة الثانية : 0 1 −1

إذن : $p(C)=p\left(\begin{array}{c}\text{كرة تحمل العدد 0}\\ \text{و كرة تحمل العدد}\\ \text{1 و كرة تحمل}\\ \text{العدد } -1\end{array}\right)$ أو $\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{تحمل}\\ \text{الصفر}\end{array}\right)$

$=p\left(\begin{array}{c}\text{كرة تحمل العدد 0}\\ \text{و كرة تحمل العدد}\\ \text{1 و كرة تحمل}\\ \text{العدد } -1\end{array}\right)+p\left(\begin{array}{c}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{تحمل}\\ \text{الصفر}\end{array}\right)$

$$=\frac{C_3^3}{35}+\frac{C_3^1\times C_3^1\times C_1^1}{35}=\frac{1}{35}+\frac{9}{35}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$$

التمرين الخامس :

1 I

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا : $g(x)=e^{-x}+x-1$

إذن : $g'(x)=-e^x+1$

إذا كان : $x\geq 0$ فإن : $e^x\geq e^0$ يعني : $e^x\geq 1$

و منه : $(\forall x\geq 0)\ ;\ 1-e^x\leq 0$

إذن : $(\forall x\geq 0)\ ;\ g'(x)\leq 0$

و منه : g دالة تناقصية على المجال $[0;+\infty[$.

إذا كان : $x\leq 0$ فإن : $e^x\leq e^0$ يعني : $e^x\leq 1$

يعني : $(\forall x\leq 0)\ ;\ 1-e^x\geq 0$

إذن : $(\forall x\leq 0)\ ;\ g'(x)\geq 0$

و منه : g دالة تزايدية على المجال $]-\infty;0]$.

2 I

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $g(0)=0$ و نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $x\geq 0$.

إذن : $g(x)\geq g(0)$ لأن : g دالة تزايدية على المجال $[0;+\infty[$.

www.baclive.blogspot.com

و بالتالي : $\boxed{\forall x \in [0;+\infty[\ ; \ g(x) \geq 0}$ (1)

الحالة الثانية : إذا كان $x < 0$.

إذن : $g(x) \geq g(0)$ لأن : g دالة تناقصية على المجال $]-\infty;0]$.

و بالتالي : $\boxed{\forall x \in]-\infty;0] \ ; \ g(x) \geq 0}$ (2)

إذن : من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ g(x) \geq 0$.

و منه : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ e^{-x} + x - 1 \geq 0$

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ e^{-x} + x \geq 1$.

II 1

نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ e^{-x} + x \geq 1$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ e^{-x} + x \neq 0$.

و منه فإن الدالة f معرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كلها .

II 2 أ

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ \dfrac{x}{x+e^{-x}} = f(x)$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ \dfrac{x}{x\left(1+\dfrac{e^{-x}}{x}\right)} = f(x)$

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{xe^{x}}\right)} = f(x)$

II 2 ب

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{xe^{x}}\right)} = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{0^-}\right)}$

$= \dfrac{1}{1+(-\infty)} = \dfrac{1}{-\infty} = 0^- = 0$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

يعني أن المستقيم $(y=0)$ أي محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$.

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}\right) = \left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{+\infty}}\right)$

$= \dfrac{1}{1+0} = 1$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

يعني أن المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب أفقي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

II 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f(x) = \dfrac{x}{x+e^{-x}}$

إذن : $f'(x) = \dfrac{(x+e^{-x}) - x(1-e^{-x})}{(x+e^{-x})^2}$

$= \dfrac{e^{-x}+xe^{-x}}{(x+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}(1+x)}{(x+e^{-x})^2}$

و بالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ f'(x) = \dfrac{e^{-x}(1+x)}{(x+e^{-x})^2}$

II 3 ب

رأينا حسب السؤال I) 2) أنه : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ e^{-x} + x \geq 1 > 0$

و لدينا كذلك : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ e^{-x} \geq 0$.

إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(x+1)$.

- إذا كان : $x = -1$ فإن : $f'(x) = 0$
- إذا كان : $x > -1$ فإن : $f'(x) > 0$
- إذا كان : $x < -1$ فإن : $f'(x) < 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$\dfrac{1}{1-e}$	↗	1

II 4 أ

معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة ذات الأفصول 0

تكتب على الشكل : $(\Delta) \ : \ y = f'(0)(x-0) + f(0)$

يعني : $(\Delta) \ : \ y = 1(x-0) + 0$ إذن : $(\Delta) \ : \ y = x$

II 4 ب

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا :

$$\frac{xg(x)}{g(x)+1} = \frac{x(e^{-x}+x-1)}{(e^{-x}+x-1)+1} = \frac{xe^{-x}+x^2-x}{e^{-x}+x}$$

$$= \frac{x(e^{-x}+x)}{(e^{-x}+x)} - \frac{x}{e^{-x}+x}$$

$$= x - \frac{x}{e^{-x}+x} = x - f(x)$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ x - f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$

لدينا حسب السؤال I) 2) : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ g(x) \geq 0$

إذن : $\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ كمية موجبة كيفما كان x من $\mathbb{R}$.

و بالتالي إشارة الفرق $(x - f(x))$ تتعلق فقط بإشارة x .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة الفرق $x - f(x)$		$-$	0	$+$	

II 4 ج

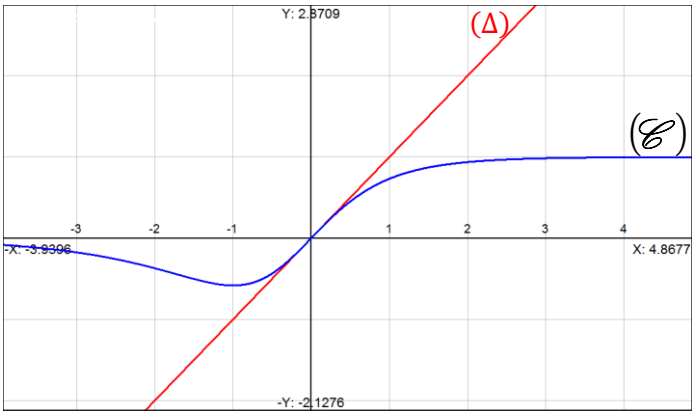
يُبَيِّنُ الجدول التالي الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم $(\Delta) : y = x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x - f(x)$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ)	المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل المستقيم (Δ)		$(\mathscr{C})$ و (Δ) يتقاطعان في O	المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (Δ)	

www.baclive.blogspot.com

II 5

التمثيل المبياني للدالة f .



III 1

نعتبر الخاصية (P) التالية : $(P) : (\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq u_n \leq 1$

لدينا : $0 \leq 1 \leq 1$ إذن : $0 \leq u_0 \leq 1$

يعني أن الخاصية (P) صحيحة من أجل $n = 0$.

نفترض أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq u_n \leq 1$.

بما أن الدالة f تزايدية على المجال $[-1; +\infty[$.

فإن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) : \ f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq f(u_n) \leq \dfrac{e}{e+1}$

و نعلم أن : $e < 1 + e$ إذن : $\dfrac{e}{e+1} < 1$

و منه : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq f(u_n) \leq \dfrac{e}{e+1} < 1$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

و هذا يعني أن الخاصية (P) صحيحة من أجل $(n+1)$.

و بالتالي حسب مبدأ الترجع في $\mathbb{N}$: $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq u_n \leq 1$.

III 2

لدينا حسب جدول الإشارة الوارد في السؤال II 4) ب) :

$(*) \ \boxed{(\forall x \geq 0) \ ; \ x \geq f(x)}$

لدينا : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ u_n \geq 0$

إذن حسب $(*)$: $u_n \geq f(u_n)$

يعني أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ u_n \geq u_{n+1}$

و بالتالي : $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

III 3

لدينا $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية

و كذلك : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 0 \leq u_n \leq 1$ إذن $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ مصغورة بالعدد 0

إذن $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و نهايتها ℓ تحقق : $f(\ell) = \ell$

يعني : $\ell - f(\ell) = 0$ أي : $\dfrac{\ell \cdot g(\ell)}{g(\ell) + 1} = 0$

نعلم أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \, ; g(x) + 1 \neq 0$ إذن : $\ell \, g(\ell) = 0$

يعني : $g(\ell) = 0$ أو $\ell = 0$.

يعني : $\ell = 0$ أو $\ell = 0$.

و بالتالي : $\lim\limits_{n \infty} u_n = 0$

www.baclive.blogspot.com