أجوبة امتحان الدورة العادية 2010

التمرين الأول :

1

لدينا : $\begin{cases} A(-1;0;3) \\ B(3;0;0) \\ C(7;1;-3) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(4;0;-3) \\ \overrightarrow{AC}(8;1;-6) \end{cases}$

و منه :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 3\vec{\imath} - 0\vec{\jmath} + 4\vec{k} = 3\vec{\imath} + 4\vec{k}$$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 4\vec{k}$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

إذن المتجهتان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متعامدتان .

يعني : $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$ و منه : $\begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

أي : $3(x+1) + 0y + 4(z-3) = 0$

يعني : $3x + 4z - 9 = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

إذن : $(ABC) : 3x + 4z - 9 = 0$.

2

لدينا $(\mathcal{S})$ فلكة معرفة بمعادلتها الديكارتية التالية :

$(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

إذن : $(\mathcal{S}) : (x^2 - 6x) + (y^2 - 2y) + (z^2) - 15 = 0$

يعني : $(\mathcal{S}) : (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 - 15 = 10$

أي : $(\mathcal{S}) : (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = 5^2$

إذن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(3;1;0)$ و شعاعها 5 .

3 أ

ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω و العمودي على المستوى (ABC) .

و لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

بما أن $M \epsilon (\Delta)$ و $\Omega \epsilon (\Delta)$

فإن المتجهة $\overrightarrow{\Omega M}$ موجهة للمستقيم (Δ) .

من جهة أخرى لدينا : $(ABC) : 3x + 4y - 9 = 0$.

إذن المتجهة $\vec{n}(3;0;4)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) .

و بما أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) .

فإن المتجهتان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{\Omega M}$ مستقيميتان .

يعني : $(\exists t \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; \overrightarrow{\Omega M} = t\,\vec{n}$

أي : $(\Delta) : \begin{cases} x - 3 = 3t \\ y - 1 = 0t \\ z - 0 = 4t \end{cases} \; ; \; (t \epsilon \mathbb{R})$

أي : $(\Delta) : \begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} \; ; \; (t \epsilon \mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

3 ب

ليكن $(\alpha;\beta;\gamma)$ مثلوث إحداثيات نقط التقاطع .

إذن : $\begin{cases} (\alpha;\beta;\gamma) \epsilon (ABC) \\ (\alpha;\beta;\gamma) \epsilon (\mathcal{S}) \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \alpha = 3 + 3t \\ \beta = 1 \\ \gamma = 4t \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 6\alpha - 2\beta - 15 = 0 \end{cases} \; ; \; (t \epsilon \mathbb{R})$

نعوض قيم α و β و γ في آخر معادلة نحصل على :

$$(3+3t)^2 + 1^2 + (4t)^2 - 6(3+3t) - 2 - 15 = 0$$

يعني : $25t^2 - 25 = 0$ يعني : $t^2 = 1$

و منه : $t = \pm 1$

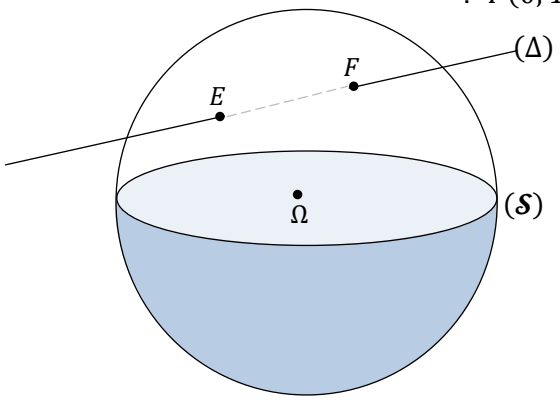
في **الحالة الأولى** : إذا كان $t = 1$.

نعوض t بالعدد 1 في المعادلات الثلاث الأولى نحصل على : $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 4 \end{cases}$

الحالة الثانية : إذا كان $t = -1$.

نعوض t بالعدد -1 نحصل على : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -4 \end{cases}$

و بالتالي : المستقيم (Δ) يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطتين $E(6;1;4)$ و $F(0;1;-4)$.



التمرين الثاني :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 10 = 36 - 40 = -4 = (2i)^2$

إذن : المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين كما يلي :

$$z_1 = \frac{6-2i}{2} = 3 - i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{6+2i}{2} = 3 + i$$

2 أ

لدينا : الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي : $\mathcal{R}_A\left(\frac{\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P})$

$M(z) \longmapsto M'(z')$

ننطلق من الكتابة $\mathcal{R}(M) = M'$.

إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب : $(z' - a) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z - a)$

يعني : $z' - (3-i) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z - (3-i))$

www.baclive.blogspot.com

يعني : $z' - (3-i) = i(z-3+i)$

يعني : $z' = iz - 3i - 1 + 3 - i$

يعني : $\boxed{z' = iz + 2 - 4i}$ $(*)$

2 ب

ليكن c' لحق النقطة C' . و ننطلق من الكتابة : $\mathcal{R}(C) = C'$.

إذن حسب النتيجة $(*)$ نجد : $c' = ic + 2 - 4i$

يعني : $c' = i(7-3i) + 2 - 4i$

أي : $c' = 7i + 3 + 2 - 4i$

يعني : $c' = 3i + 5$

2 ج

لدينا :

$$\frac{c'-b}{c-b} = \frac{(5+3i)-(3+i)}{(7-3i)-(3+i)} = \frac{2+2i}{4-4i} = \frac{2(1+i)}{4(1-i)}$$

$$= \frac{2(1+i)(1+i)}{4(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+2i-1)}{4(1-(-1))} = \frac{4i}{8} = \frac{1}{2}i$$

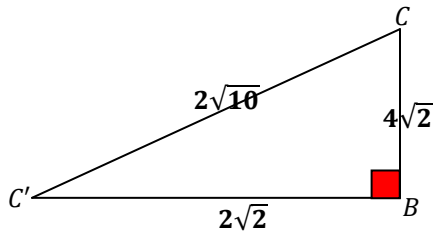
إذن : $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$

و من هذه النتيجة نحصل على :

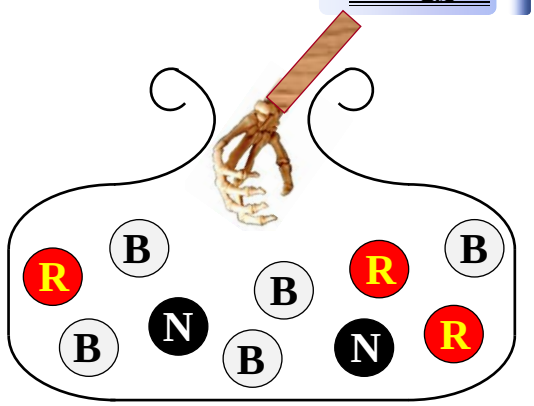
$$\begin{cases} \left|\frac{c'-b}{c-b}\right| = \frac{1}{2} \\ \arg\left(\frac{c'-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

أي : $\begin{cases} |c-b| = 2|c'-b| \\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ أي : $\begin{cases} BC = 2BC' \\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

و هذا يعني أن المثلث BCC' قائم الزاوية في النقطة B و طول أحد أضلاعه يساوي ضعف طول ضلع آخر .



التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل C_{10}^4 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$ بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

لدينا : $p\left(\begin{matrix}\text{الحصول على}\\ \text{كرة حمراء}\\ \text{واحدة فقط}\end{matrix}\right) = p\begin{pmatrix} R & R & R \\ B & B & B \\ B & B & N \\ B & N & N \end{pmatrix}$ أو أو

$$= p\begin{pmatrix} R \\ B \\ B \\ B \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} R \\ B \\ B \\ N \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} R \\ B \\ N \\ N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{C_3^1 \times C_5^3}{card(\Omega)} + \frac{C_3^1 \times C_5^2 \times C_2^1}{card(\Omega)} + \frac{C_3^1 \times C_5^1 \times C_2^2}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{3 \times 10}{210} + \frac{3 \times 10 \times 2}{210} + \frac{3 \times 5 \times 1}{210} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$$

إذن : $p(A) = \frac{1}{2}$

لدينا $B = \{$ الحصول على كرة بيضاء على الأقل $\}$

لحساب احتمال الحدث B توجد طريقتان :

1) الطريقة المتهورة :

يتحقق الحدث B في 9 حالات و هي :

$\boxed{R\ R\ R\ B}$ بـ $C_3^3 \times C_5^1$ إمكانية .

$\boxed{N\ R\ R\ B}$ بـ $C_2^1 \times C_3^2 \times C_5^1$ إمكانية .

$\boxed{N\ N\ R\ B}$ بـ $C_2^2 \times C_3^1 \times C_5^1$ إمكانية .

$\boxed{R\ R\ B\ B}$ بـ $C_3^2 \times C_5^2$ إمكانية .

$\boxed{N\ R\ B\ B}$ بـ $C_2^1 \times C_3^1 \times C_5^2$ إمكانية .

$\boxed{N\ N\ B\ B}$ بـ $C_2^2 \times C_5^2$ إمكانية .

$\boxed{R\ B\ B\ B}$ بـ $C_3^1 \times C_5^3$ إمكانية .

$\boxed{N\ B\ B\ B}$ بـ $C_2^1 \times C_5^3$ إمكانية .

$\boxed{B\ B\ B\ B}$ بـ C_5^4 إمكانية .

إذن :

$$p(B) = \frac{5+30+15+30+60+10+30+20+5}{210} = \frac{205}{210} = \frac{41}{42}$$

2) الطريقة الذكية : (استعمال الحدث المضاد $\bar{B}$)

لدينا : $B = \{$ الحصول على كرة بيضاء على الأقل $\}$

إذن : $\bar{B} = \{$ الحصول على كرات كلها تخالف اللون الأبيض $\}$

$$p(\bar{B}) = p\left(\begin{matrix}\text{أربع كرات}\\ \text{مخالفة للون}\\ \text{الأبيض}\end{matrix}\right) = p\left(\begin{matrix}\text{ثلاث كرات}\\ \text{حمراء و كرة}\\ \text{سوداء}\end{matrix}\right) \text{ أو } \left(\begin{matrix}\text{كرتين حمراوين}\\ \text{و كرتين}\\ \text{سوداوين}\end{matrix}\right)$$

$$= p\left(\begin{matrix}\text{ثلاث كرات}\\ \text{حمراء و كرة}\\ \text{سوداء}\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}\text{كرتين حمراوين}\\ \text{و كرتين}\\ \text{سوداوين}\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{C_3^3 \times C_2^1}{210} + \frac{C_3^2 \times C_2^2}{210} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$$

إذن : $p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$

www.baclive.blogspot.com

2 أ

عندما نسحب أربع كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات ثلاث منها حمراء فإنه يحتمل:

- أن لا نحصل على أية كرة حمراء .
- أن نحصل على كرة حمراء واحدة .
- أن نحصل على كرتين حمراوين .
- أن نحصل على ثلاث كرات حمراء .

إذن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي : 0 و 1 و 2 و 3 .

و هذا يعني أن : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

2 ب

الحدث $[X = 2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين من بين الكرات الأربع المسحوبة .

إذن :

$$p[X=2] = p\begin{pmatrix} R & R & R \\ R & \text{أو} & R & \text{أو} & R \\ B & & N & & B \\ B & & N & & N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{C_3^2 \times C_5^2}{210} + \frac{C_3^2 \times C_2^2}{210} + \frac{C_3^2 \times C_5^1 \times C_2^1}{210}$$

$$= \frac{30}{210} + \frac{3}{210} + \frac{30}{210} = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}$$

إذن : $p[X=2] = \frac{3}{10}$

الحدث $[X = 0]$ هو الحصول على أربع كرات كلها تخالف اللون الأحمر .

إذن :

$$p[X=0] = p\begin{pmatrix} B & B & B \\ B & \text{أو} & B & \text{أو} & B \\ B & & B & & N \\ B & & N & & N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{C_5^4}{210} + \frac{C_5^3 \times C_2^1}{210} + \frac{C_5^2 \times C_2^2}{210}$$

$$= \frac{5}{210} + \frac{20}{210} + \frac{10}{210} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

إذن : $p[X=0] = \frac{1}{6}$

2 ج

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$P_X : \{0; 1; 2; 3\} \longmapsto [0,1]$$
$$k \longmapsto P_k(X) = p[X = k]$$

لدينا حسب السؤال ب) : $p[X=2] = \frac{3}{10}$ و $p[X=0] = \frac{1}{6}$.

يكفي إذن تحديد : $p[X=1]$ و $p[X=3]$.

لدينا الحدث $[X = 3]$ هو الحصول على ثلاث كرات حمراء .

إذن :

$$p[X=3] = p(\text{ثلاث كرات حمراء})$$

$$= p\begin{pmatrix} R & R \\ R & \text{أو} & R \\ R & & R \\ N & & B \end{pmatrix} = \frac{C_3^3 \times C_2^1}{210} + \frac{C_3^3 \times C_5^1}{210}$$

$$= \frac{2}{210} + \frac{5}{210} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$$

و لدينا كذلك $[X = 1]$ هو الحصول على كرة حمراء واحدة .

إذن حسب السؤال 1) : $p[X=1] = p(A) = \frac{1}{2}$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X يصبح :

$$P_X : \{0; 1; 2; 3\} \longmapsto [0,1]$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} 0 & \longmapsto & P_X(0) = p[X=0] = \frac{1}{6} \\ 1 & \longmapsto & P_X(1) = p[X=1] = \frac{1}{2} \\ 2 & \longmapsto & P_X(2) = p[X=2] = \frac{3}{10} \\ 3 & \longmapsto & P_X(3) = p[X=3] = \frac{1}{30} \end{array}}$$

التمرين الرابع :

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

نعتبر العبارة (P_n) المعرفة بما يلي : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n - 1 > 0$

لدينا : $2 - 1 > 0$ إذن : $u_0 - 1 > 0$. يعني : العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n - 1 > 0$

لدينا : $u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \frac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n} = \frac{u_n - 1}{2u_n}$

لدينا حسب الافتراض : $\boxed{u_n - 1 > 0}$ (1)

إذن : $u_n > 1$ و منه : $\boxed{2u_n > 2 > 0}$ (2)

و من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : u_{n-1} و $2u_n$ كميتان موجبتان

إذن الكمية $\left(\frac{u_n - 1}{2u_n}\right)$ موجبة قطعا .

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_n - 1}{2u_n} > 0$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - 1 > 0$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

لقد حصلنا لحد الآن على ما يلي :

$$\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_n) \Longrightarrow (P_{n+1}) \ ; \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

و بالتالي : حسب مبدأ الترجع : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ (P_n)\ est\ vraie$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n - 1 > 0$

2 أ

لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2\left(\frac{3u_n - 1}{2u_n}\right) - 1} = \frac{\frac{u_n - 1}{2u_n}}{\frac{2u_n - 1}{u_n}}$$

$$= \frac{u_n - 1}{2u_n} \times \frac{u_n}{2u_n - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - 1}{2u_n - 1}\right) = \frac{1}{2} v_n$$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

و هذا يعني أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

إذن حدها العام v_n يكتب على الشكل :

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0} = \left(\frac{u_0 - 1}{2u_0 - 1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{2 - 1}{2 \times 2 - 1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

إذن : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

www.baclive.blogspot.com

2 ب

لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ v_n(2u_n - 1) = (u_n - 1)$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 2v_nu_n - v_n = u_n - 1$

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n(2v_n - 1) = v_n - 1$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n = \dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}$

لدينا : $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و هو عدد موجب أصغر من 1 .

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ أي : $\lim\limits_{n\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

يعني : $\lim\limits_{n\infty} v_n = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}\right) = \dfrac{0-1}{0-1} = 1$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty} u_n = 1$

3

لتكن $(w_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ w_n = \ln(u_n)$

$\lim\limits_{n\infty} w_n = \lim\limits_{n\infty}\ln(u_n) = \ln 1 = 0$

إذن : $\lim\limits_{n\infty} w_n = 0$

التمرين الخامس :

I 1

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g'(x) = 4(e^{2x} + 2xe^{2x}) = 4(2x+1)e^{2x}$

I 2

نعلم أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ 4e^{2x} > 0$

إذن : إشارة $g'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(2x+1)$.

إذا كان : $x = -\frac{1}{2}$ فإن : $g'(x) = 0$

إذا كان : $x > -\frac{1}{2}$ فإن : $g'(x) > 0$

إذا كان : $x < -\frac{1}{2}$ فإن : $g'(x) < 0$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$\frac{e-2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

و من خلال الجدول نلاحظ أن :

g دالة تزايدية على $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]$.

I 3 أ

$$g\left(\frac{-1}{e}\right) = 1 + 4\left(\frac{-1}{e}\right)e^{2\left(\frac{-1}{e}\right)} = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$$

بما أن : $e > 2$ فإن : $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$

يعني : $\frac{2}{e} < 1$ و منه : $1 - \frac{2}{e} > 0$

و بالتالي : $g\left(\frac{-1}{e}\right) > 0$

I 3 ب

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. و نفصل هنا بين حالتين :

الحالة الأولى : $x \geq \frac{-1}{2}$

إذن : $g(x) \geq g\left(\frac{-1}{2}\right) > 0$ لأن g تزايدية على المجال $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$

و منه : $\forall\, x \geq \frac{-1}{2}\ ;\ g(x) > 0$ | (1)

الحالة الثانية : $x \leq \frac{-1}{2}$

إذن : $g(x) \geq g\left(\frac{-1}{2}\right) > 0$ لأن g تناقصية على المجال $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]$.

و منه : $\forall\, x \geq \frac{-1}{2}\ ;\ g(x) > 0$ | (2)

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن أنه في كلتا الحالتين نجد : $g(x) > 0$

و بالتالي : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g(x) > 0$

II 1

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left((2x-1)e^{2x} + x + 1\right) = (+\infty)(+\infty) + \infty + 1 = +\infty$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا كذلك :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left((2x-1)e^{2x} + x + 1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1\right) = \lim_{\substack{x\to-\infty\\ u=2x}}\left(\underbrace{ue^u}_{\substack{-\infty\\ \searrow\\ 0^-}} - \underbrace{e^u}_{\substack{-\infty\\ \searrow\\ 0^+}} + \underbrace{\frac{u}{2}}_{\substack{-\infty\\ \searrow\\ -\infty}} + 1\right) = 0 - 0 - \infty + 1 = -\infty$$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

II 2

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} + 1$

يعني : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{2x} + 4xe^{2x} + 1$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = 4xe^{2x} + 1 = g(x)$

و نعلم حسب نتيجة السؤال I 3) ب) أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g(x) > 0$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) > 0$

و هذا يعني أن الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

www.baclive.blogspot.com

II 3 أ

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)e^{2x}+1+\frac{1}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)e^{2x}+1+\frac{1}{x}$$
$$=(2-0)e^{+\infty}+1+0=2(+\infty)+1=+\infty$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

حصلنا إذن على النهايتين التاليتين :
$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\end{cases}$$

و هذا يعني أن المنحنى يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

II 3 ب

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))=\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}(2xe^{2x}-e^{2x})$$
$$=\lim_{\substack{u\to-\infty\\ u=2x}}(\underbrace{ue^{u}}_{\to 0^-}-\underbrace{e^{u}}_{\to 0^+})=0$$

$-\infty$ $-\infty$

إذن : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))=0$

يعني : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)-1=0$

أي : $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=1$

لنحسب نهاية $\frac{f(x)}{x}$ بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)e^{2x}+1+\frac{1}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)e^{2x}+1+\frac{1}{x}$$
$$=(2-0)e^{-\infty}+1+0=2\times0+1=1$$

إذن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

حصلنا إذن لحد الآن على النهايات التالية :
$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1\\ \lim_{x\to-\infty}f(x)-1x=1\end{cases}$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى بجوار $-\infty$.

II 3 ج

لتحديد نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ و (Δ) نحل المعادلة $f(x)=(x+1)$

التي تُكافِئُ : $(2x-1)e^{2x}+(x+1)=(x+1)$

يعني : $(2x-1)e^{2x}=0$

بما أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^{2x}\neq0$ فإن : $2x-1=0$ أي : $x=\frac{1}{2}$

إذن أفصول نقطة التقاطع هو $\frac{1}{2}$ و أرتوبها هو : $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

و بالتالي : النقطة $H\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ هي نقطة تقاطع المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) .

لدينا : $f(x)-(x+1)=(2x-1)e^{2x}$

إذا كان : $x>\frac{1}{2}$ فإن : $2x-1>0$ أي : $f(x)>(x+1)$

يعني أن يوجد فوق (Δ) على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

و إذا كان $x<\frac{1}{2}$ فإن : $(2x-1)<0$

يعني : $f(x)<(x+1)$

إذن : المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل (Δ) على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

II 4 أ

نعلم أن المعادلة الديكارتية للمماس (T) للمنحنى في النقطة التي أفصولها x_0 هي :
$$(T)\ :\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

لدينا :
$$\begin{cases}f'(0)=g(0)=1\\ f(0)=0\end{cases}$$

إذن : $(T)\ :\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$

أي : $(T)\ :\ y=1(x-0)+0$

و بالتالي : $(T)\ :\ y=x$

II 4 ب

لتحديد نقطة الانعطاف ، نحدد النقط التي تنعدم فيها المشتقة الثانية f''

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=g(x)$

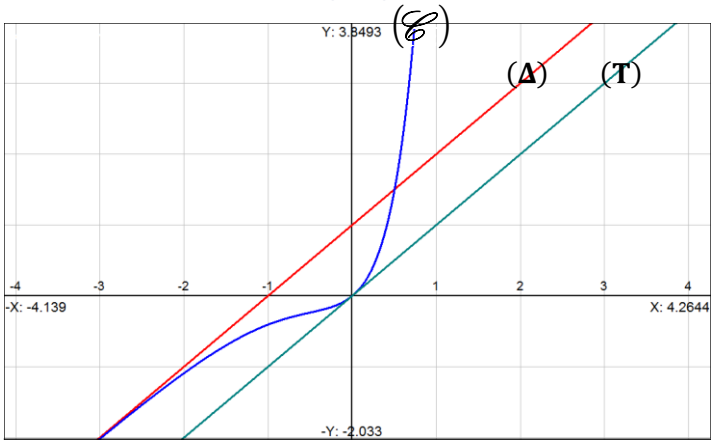
إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f''(x)=g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$

إذن $f''(x)$ تنعدم إذا كان $2x+1=0$

و بالتالي : $f''(x)$ تنعدم إذا كان : $x=\frac{-1}{2}$

يعني أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف واحدة أفصولها $\frac{-1}{2}$

II 5



II 6 أ

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\underbrace{(2x-1)}_{u}\ \underbrace{e^{2x}}_{v'}\,dx=[uv]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}u'v\,dx$$
$$=\left[\left(\frac{2x-1}{2}\right)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}(2)\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)dx$$
$$=\left(0-\left(\frac{-1}{2}\right)\right)-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{2x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}-\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right)=\boxed{1-\frac{e}{2}}$$

www.baclive.blogspot.com

II 6 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (T) و المستقيمين $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$.

نعلم أن التكامل يقيس هندسيا طول أو مساحة أو حجم . إذن :

$$\mathcal{A}=\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)-x|\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}|(2x-1)e^{2x}+1|\,dx$$

نعتبر الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\varphi(x)=(2x-1)e^{2x}+1$

لدينا : $\varphi'(x)=2e^{2x}+2(2x-1)e^{2x}=4xe^{2x}$

نلاحظ أن : $(\forall x\geq 0)\ ;\ 4xe^{2x}\geq 0$

يعني : $(\forall x\geq 0)\ ;\ \varphi'(x)\geq 0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $[0;+\infty[$.

و منه : $(\forall x\geq 0)\ ;\ \varphi(x)\geq\varphi(0)=0$

أي : $(\forall x\geq 0)\ ;\ \varphi(x)\geq 0$

و منه : $(\forall x\geq 0)\ ;\ |\varphi(x)|=\varphi(x)$

إذن بالرجوع إلى المساحة $\mathcal{A}$ نجد :

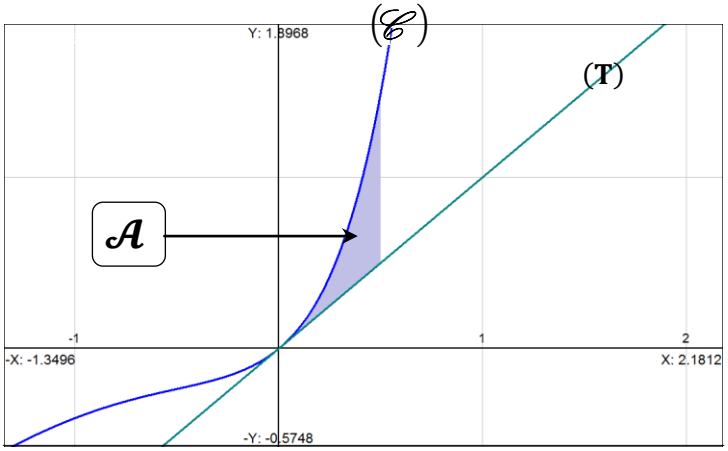
$$\begin{aligned}\mathcal{A}=\int_0^{\frac{1}{2}}|\varphi(x)|\,dx&=\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}+1\,dx\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}1\,dx\\&=\left(1-\frac{e}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{e}{2}\end{aligned}$$

و بالتالي : $\mathcal{A}=\left(\frac{3}{2}-\frac{e}{2}\right)(unité)^2$

بما أن : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\ cm$ فإن : $l'unité=2cm$

و منه : $(l'unité)^2=4cm^2$. و بالتالي :

$$\mathcal{A}=\left(\frac{3}{2}-\frac{e}{2}\right)(unité)^2=\left(\frac{3}{2}-\frac{e}{2}\right)(4cm^2)=(6-2e)\ cm^2$$



www.baclive.blogspot.com