

~~Anass~~

La théorie générale du  
moment cinétique.

I / Définition du moment cinétique  
orbitale

Le moment cinétique orbitale  
est définie par

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Quantification on remplace

les variables  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$

par des observables  $(X, Y, Z, P_x, P_y, P_z)$

avec  $\vec{r} \rightarrow \vec{R}$

$$[T_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$[X, P_y] = 0$$

$$[X, P_x] = i\hbar$$

$$[Y, P_y] = i\hbar$$

$$[Z, P_z] = i\hbar$$

$$\begin{cases} L_x = y p_z - z p_y \\ L_y = z p_x - x p_z \\ L_z = x p_y - y p_x \end{cases}$$

avec  $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$   
 $[L_y, L_z] = i\hbar L_x$   
 $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$

Debut de l'interaction  
 le moment  
 cinétique  
 en MQ.

$J \equiv$  Moment cinétique

on appelle moment cinétique  
 "J" tout Ensemble de trois  
 observables  $\{J_x, J_y, J_z\}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} [J_x, J_y] = i\hbar J_z \\ [J_y, J_z] = i\hbar J_x \\ [J_z, J_x] = i\hbar J_y \end{array} \right.$$

Propriétés fondamentales

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \text{ et}$$

$$L = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [L^2, L_x] = 0 \\ [L^2, L_y] = 0 \\ [L^2, L_z] = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration de  $[L^2, L_i] = 0$

$$\text{ana } [L^2, L_x] = [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_x]$$

$$= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x]$$

$$\text{ana } [AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$$

$$* [L_y L_y, L_x] = [L_y, L_x] L_y + L_y [L_y, L_x]$$

$$= -i\hbar L_z L_y - i\hbar L_y L_z$$

$$* [L_z L_z, L_x] = [L_z, L_x] L_z + L_z [L_z, L_x]$$

$$= i\hbar L_y L_z + i\hbar L_z L_y$$

$$[L_x L_x, L_x] = 0$$

$$\Rightarrow [L_y^2, L_x] = \begin{matrix} -i\hbar L_z L_y & -i\hbar L_y L_z & + \\ i\hbar L_y L_z & +i\hbar L_z L_y & \\ -1 & +0 & = 0 \end{matrix}$$

conclusion

$$[L^2, L_x] = 0$$

$$[L^2, L_y] = 0$$

$$[L^2, L_z] = 0$$

$\{L^2, L_x\}$  commutent

on peut construire un E.C.O.C  
avec l'ensemble  $\{L^2, L_x\}$

Même chose pour

$J$

$$[J^2, J_x] = 0 = [J^2 J_z] \\ = [J^2 J_y]$$

$L^2$  commute avec chaque  
composante de  $L$

• Remarque

une constante du  
mouvement est un observable  
qui commutent avec  $H$ .

opérateurs  $L_+$ ,  $L_-$

$$L_+ = L_x + iL_y$$

$$L_- = L_x - iL_y$$

$$[L_+, L_-] = 4L_z - L^2$$

$$\begin{aligned} [L_+, L_-] &= (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) \\ &= L_x^2 + (-iL_xL_y + iL_yL_x) \\ &\quad + L_y^2 \end{aligned}$$

$$L_+ L_- = L_x^2 + i[L_y, L_x] + L_y^2$$

$$= L_x^2 + L_y^2 + \hbar L_z$$

$$L_- L_+ = (L_x - iL_y)(L_x + iL_y)$$

$$= L_x^2 + iL_x L_y - iL_y L_x + L_y^2$$

$$= L_x^2 + L_y^2 + i[L_x, L_y]$$

$$= L_x^2 + L_y^2 - \hbar L_z$$

$$\Rightarrow [L_+, L_-] = \hbar L_z - (-\hbar L_z)$$

$$[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$$

on can prove  $[L^2, L_+] = 0$ ?

$$[L^2, L_+]$$

$$[L^2, L_x + iL_y] = [L^2, L_x] + i[L^2, L_y]$$

Reja Reimann  $= 0$

$$[L^2, L_+] = 0$$

$$[L^2, L_-] = 0$$

$$[L^2, L_+] = [L^2, L_x] + i[L^2, L_y]$$

$$= i\hbar L_y + \hbar L_x = \hbar[L_x + iL_y] = \hbar L_+$$

$$[L^2, L_-] = \hbar L_-$$

$$= [L^2, L_x] - i[L^2, L_y]$$

$$= i\hbar L_y - \hbar L_x = -\hbar L_-$$

[

-

Résumé

$$[L_z, L_+] = \hbar L_+$$

$$[L_z, L_-] = -\hbar L_-$$

$$[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$$

$$[L^2, L_+] = [L^2, L_-] = [L^2, L_z] = 0$$

• On a  $L^2 = \frac{1}{2}(L_+ L_- + L_- L_+) + L_z^2$

Démonstration

$$L_+ L_- = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y)$$

$$= L_x^2 - iL_x L_y + iL_y L_x + L_y^2$$

$$L_+ L_- = L_x^2 + L_y^2 + i[L_y, L_x]$$

$$L_+ L_- = L_x^2 + L_y^2 + i(-i\hbar L_z)$$

$$\cancel{\times} L_+ L_- = L_x^2 + L_y^2 + \hbar L_z$$

$$L_- L_+ = L_x^2 + L_y^2 - \hbar L_z$$

$$\cancel{\times} L_+ L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z$$

$$L_- L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$$

$$L^2 = L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z$$

$$L^2 = L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z$$

$$2L^2 = L_+ L_- + L_- L_+ + 2L_z^2$$

$$\Rightarrow L^2 = \frac{1}{2} (L_+ L_- + L_- L_+) + L_z^2$$

$L^2$  : est la somme de 3 opérateurs hermitiques. ( $L+L^-$ ,  $L-L^+$ ,  $Lz^2$ )

$\langle \psi_n | L^2 | \psi_n \rangle$  est positif ou nul.

$$\langle \psi_n | L^2 | \psi_n \rangle$$

$$= \langle \psi_n | L^x | \psi_n \rangle + \langle \psi_n | L^y | \psi_n \rangle + \langle \psi_n | L^z | \psi_n \rangle$$

$$= \langle \psi_n | L^x | \psi_n \rangle + \overline{\langle \psi_n | L^x | \psi_n \rangle} + \overline{\langle \psi_n | L^y | \psi_n \rangle} \langle \psi_n | L^y | \psi_n \rangle + \overline{\langle \psi_n | L^z | \psi_n \rangle} \langle \psi_n | L^z | \psi_n \rangle$$

$$\langle L^2 \rangle_{\psi_n} = |\langle L^x | \psi_n \rangle|^2 + |\langle L^y | \psi_n \rangle|^2 + |\langle L^z | \psi_n \rangle|^2 \geq 0$$

Donc les éléments de la matrice  $L^2$  sont positifs ou nuls.

les valeurs propres de  $L^2$  sont toujours  
positives.

$$a = l(l+1)\hbar^2 \quad l \geq 0$$

$a$ : valeur propre de  $L^2$

les vecteurs propres communs aux  
opérateurs  $H, L^2, L_z$   
par la convention suivante

$$|l, l, m\rangle$$

$l$ : valeurs propres de  $H$

$l$ : " " " " " " " "

$m$ : " " " " " " " "

le problème.

$$L^2 |h, l, m\rangle = l(l+1)\hbar^2 |h, l, m\rangle$$

$$L_z |h, l, m\rangle = m\hbar |h, l, m\rangle$$

Lemme 1

si  $l(l+1)\hbar^2$  et  $m\hbar$  sont les valeurs propres de  $L^2$  et  $L_z$  associées au même vecteur propre  $|h, l, m\rangle$

$$\text{Alors } -l \leq m \leq l$$

Lemme 2

si  $l(l+1)\hbar^2$  et  $m\hbar$  les valeurs propres de  $L^2$  et  $L_z$  associées au même vecteur propre  $|h, l, m\rangle$

(i)  $m = -l$  alors  $L_- |l, l, -l\rangle = 0$

(ii) si  $m > -l$  alors  $L_- |l, l, m\rangle$   
est vecteur propre non nul de  $L^2$  et  $L_z$   
avec les valeurs propres

$$l(l+1)\hbar^2 \text{ et } -(m-1)\hbar.$$

### Lemmes

soient  $l(l+1)\hbar^2$  et  $m\hbar$  ( $\forall p$ )  
de  $L^2$  et  $L_z$  associées au  
même vecteur propre  $|l, l, m\rangle$

(i) si  $m = l$  alors  $L_+ |l, l, m\rangle = 0$

(ii)  $m < l \Rightarrow L_+ |l, l, m\rangle$  est  
vecteur propre non nul de  $L^2$  et  $L_z$

avec les valeurs propres  
 $l(l+1)\hbar^2$  et  $(m+1)\hbar$